**№ 6-дәріс.**

**Тақырыбы: Дифференциалдық теңдеулер.**
**Негізгі ұғымдары. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Коши есебі. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер. Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер.**

1. Ізделінді функцияны, оның туындылары мен дифференциалдарын және аргументтерін байланыстыратын теңдеуді дифференциалдық теңдеу деп айтамыз.

2. Теңдеуге кіретін туындының не дифференциалдың ең жоғарғы ретін дифференциалдық теңдеудің реті деп атаймыз.

3. Дифференциалдық теңдеудің шешімі деп кез келген функцияны айтамыз, егер оның өзін, туындысын және дифференциалын теңдеуге қойғанда тепе-теңдік шығатын болса.

4. Тек қана бір айнымалыға (бірнеше айнымалыға) тәуелді дифференциалдық теңдеуді қарапайым ( дербес туындылы) дифференциалдық теңдеулер деп айтамыз.

*Мысал 1.*

а) $\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial y^2}=f(x;y)$ - екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу;

б) $y'''(x)-xy^2(x)=3$ - үшінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу;

в) $xdx-ydy=0$ - бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу.

*Ескерту 1.* Ары қарай дифференциалдық теңдеу дегенді қарапайым дифференциалдық теңдеу деп түсінеміз.

*Мысал 2.* Теңдеудің жалпы шешімін тап

а) $y'=2x \Rightarrow \int y'dx=\int 2xdx \Rightarrow$

$$y=x^2+C \qquad (1)$$

(1) шешімі кез келген C тұрақтысына байланысты, яғни, C-ның әртүрлі мәнінде әртүрлі шешім аламыз.Енді C тұрақтысын анықтау үшін қосымша бір шарт (бастапқы шарт) берелік: $y(1)=2$.

Онда осы бастапқы шартты (1)-ге қойсақ: $2=1^2+C \Rightarrow C=1 \Rightarrow y=x^2+1$ - дербес шешім.

б) $y''=2 \Rightarrow \int (y')'dx=\int 2dx \Rightarrow y'=2x+C_1 \Rightarrow \int y'dx=\int (2x+C_1)dx \Rightarrow$

$$y=x^2+C_1x+C_2 \text{ - жалпы шешім.} \qquad (2)$$

Екінші ретті (2) теңдеуі екі тұрақтыға байланысты $C_1$ және $C_2$, оларды анықтау үшін екі шарт (бастапқы) қажет: $y(0)=1,\ y'(0)=2$. Бұдан:

$$\begin{cases} y=x^2+C_1x+C_2 \\ y'=2x+C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=C_2 \\ 2=C_1 \end{cases} \Rightarrow y=x^2+2x+1 \text{ - дербес шешім.}$$

Геометриялық тұрғыдан, (1) және (2) шешімдері – параболалар жиынтығы. Бастапқы шарт берілді деген: осы параболалар жиынтығынан мына шарттарды қанағаттандыратын параболаны тап деген сөз:

а) $M(1;2)$ нүктесі арқылы өтетін; б) $M(0;1)$ нүктесі арқылы өтетін және $x=0$ нүктесінде жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффиценті $k=y'(0)=2$ болатын.

**Коши теоремасы. Жалпы және дербес шешім.**

$n$ – ші ретті айқын дифференциалдық теңдеу мына түрде жазылады:

$$y^{(n)} = f(x; y; y';...; y^{(n-1)}), \quad (3)$$

ал айқын емес $n$ – ші ретті дифференциалдық теңдеу: $F(x, y, y',..., y^{(n)}) = 0$.

**Коши есебі.** (3) дифференциалдық теңдеуінің, $x = x_0$ болғанда

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}{}_0 \quad (4)$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімдерін тап.

**Коши теоремасы.** Егер қандай да бір тұйық облыста $f(x; y; y',..., y^{(n-1)})$ функциясы барлық аргументі бойынша үзіліссіз болып және осы облыста оның дербес туындылары $f'_y, f'_{y'},..., f'_{y^{(n-1)}}$ табылса, онда (3) дифференциалдық теңдеуінің (4) бастапқы шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі болады, мұндағы $(x_0; y_0)$ нүктесі - осы облысқа тиісті нүкте.

**Анықтама 5.** Кез келген дифференциалданатын функция

$$y = \varphi(x; C_1, C_2,..., C_n), \quad (5)$$

мұндағы $C_i, i = \overline{1,n}$ - кез келген тұрақтылар, (3) дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі деп аталады, егер:

а) ол $C_i$, $i = \overline{1,n}$ -дің кез келген тұрақты мәндерінде (3) дифференциалдық теңдеуінің шешімі болса,

б) Коши теоремасының шартын қанағаттандыратын осы облыстың кез келген бастапқы шарты үшін,

$$y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0;...; C_n^0) \quad (6)$$

шешімі бастапқы шартты қанағаттандыратындай $C_i = C_i^0, i = \overline{1,n}$ тұрақтылары табылатын болса.

Дифференциал теңдеудің берілген облысындағы әрбір нүктесі үшін жалғыздық шарты орындалатын болса, онда (6) түріндегі шешім дербес шешім деп аталады.

Геометриялық тұрғыдан, (5) – қисықтар жиынтығы (интегралдық қисықтар). Коши теоремасының шарты орындалды дегеніміз - облысқа тиісті кез келген $(x_0, y_0)$ нүктесінен (4) шартын қанағаттандыратын тек бір ғана қисық өтеді деген сөз.

(3) теңдеуінің айқын емес түрде берілген жалпы (дербес) шешімі: $\Phi(x; y; C_1; C_2;...; C_n) = 0$ $\left[\Phi(x; y; C_1^0; C_2^0;...; C_n^0)\right]$ сәйкесінше дифференциалдық теңдеудің жалпы (дербес) интегралы деп аталады. (3) теңдеуінің жалпы және дербес шешімінен басқа ерекше шешімдері болады.

**Анықтама 6.** $C_i$-ді $(i = \overline{1,n})$ қандай етіп таңдап алсақ та, жалпы шешімнен шықпайтын және шешімнің жалғыздық шарты бұзылатын нүктелерде орналасқан (облыстың шекарасында) шешімдерді ерекше шешімдер деп атаймыз.

*Мысал 3.* Мынадай теңдеуді қарастыралық:

$$y' = \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}, \quad R > 0 \quad (7)$$

*Шешуі.* Орнына қою арқылы (7) теңдеуінің жалпы интегралы:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2 \quad (8)$$

болатынына көз жеткізуге болады.

$$f'_y = -\frac{R^2}{y^2\sqrt{R^2 - y^2}},$$

болғандықтан, $y = 0, y = \pm R$ түзулерінде $f'_y$ - шектелмеген, яғни, Коши теоремасының шарты бұзылып тұр. $y = 0$ (7)-теңдеуінің шешімі болмайтыны анық, ал $y = \pm R$ түзулері

(7) теңдеуінің шешімдері және бұл шешімдер жалпы шешім (8)-дегі $C$ қалай таңдалса да онымен беттеспейді, С=±∞ болса да. Геометриялық тұрғыдан, бұл - $y = \pm R$ түзулерінің кез келген нүктесі арқылы екі интегралдық қисық өтеді деген сөз. Мысалы, $(0; R)$ нүктесі арқылы $y = R$ және $x^2 + y^2 = R\ (C = 0)$ қисықтары өтеді. Сонымен, $y = \pm R$ - ерекше шешім.

2 мысалда байқағанымыздай, теңдеуді шешу кезінде біз алғашқы функция табамыз. Сондықтан, дифференциалдық теңдеудің шешімін табу процессі теңдеуді интегралдау деп аталады.

**Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер және оларды интегралдау әдістері.**

**Анықтама 7.** $y'$ бойынша шешілетін теңдеу:

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y), \quad y' = f(x; y) \tag{9}$$

түрінде жазылады.

Бірінші ретті теңдеудің дифференциалдық пішіні мына түрде болады:

$$M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0 \tag{10}$$

Геометриялық тұрғыдан, (9) теңдеуі әрбір $M(x; y)$ нүктесі үшін интегралдық қисыққа жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффицентінің мәнін береді, яғни, бағыттар өрісін береді.

*Ескерту 2.* Кей жағдайларда, $x$-ті $y$-ке қатысты функция ретінде қарастырсақ $\left( x' = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy} \right)$, теңдеуді интегралдау жеңілденеді. Сондықтан да, ары қарай $x$ пен $y$-ті тең құқылы айнымалылар деп есептейміз.

*Мысал 4.* $F(x, y) = \ln\frac{y}{x} - 5 + xy$ түрінде берілген айқын емес функция $(x + x^2 y)y' = y - xy^2$ дифференциалдық теңдеуінің интегралы болатынын дәлелде.

*Шешуі.* Айқын емес функцияны дифференциалдау ережесіне сәйкес:

$y' = \frac{F'_x}{F'_e} = -(y - \frac{1}{x})/(x + \frac{1}{y}) = \frac{y}{x}\frac{1 - xy}{1 + xy} = \frac{y - xy^2}{x + x^2 y}$. Табылған туындыны берілген дифференциалдық теңдеуге қоятын болсақ, тепе-теңдік аламыз.

**Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.**

**Анықтама 8.**

$$M(x) \cdot N(y)dx + P(x) \cdot Q(y)dy = 0\ , \tag{11}$$

түріндегі, $dx$ пен $dy$-тің алдындағы коэффиценттері тек $x$-ке тәуелді функция мен тек $y$-ке тәуелді функциялардың көбейтінділері болатын дифференциалдық теңдеу айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу деп аталады.

$P(x) \neq 0$, $N(y) \neq 0$ деп есептеп, (11)-теңдеуінің екі жағын да $P(x) \cdot N(y)$ көбейтіндісіне бөліп, интегралдасақ:

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C\ .$$

Дифференциал теңдеудің жалпы шешімін алдық.

*Ескерту 3.* $P(x)=0$, $N(y)=0$ жағдайлары бөлек зерттеледі. Егер дифференциал теңдеудің ерекше шешімдері бар болса, онда олар берілген алгебралық теңдеудің шешімдері болып табылады.

*Мысал 5.* Теңдеуді шеш:

$$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0.$$

*Шешуі.* Бұл айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Екі жағын да, $x^2-1\neq 0$, $y^2-1\neq 0$ дей отырып, $(x^2-1)(y^2-1)$ көбейтіндісіне бөлеміз.

$$\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2-1}dy\Rightarrow\int\frac{x}{x^2-1}dx+\int\frac{y}{y^2-1}dy=C_1\Rightarrow\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=\frac{1}{2}\ln C\Rightarrow$$

$$(x^2-1)(y^2-1)=C$$ - жалпы интеграл.

Енді, $x^2-1=0$ және $y^2-1=0$ қарастыралық.

$x=\pm1$ және $y=\pm1$ шешімдері берілген дифференциалдық теңдеудің шешімдері болады, бірақ олар жалпы шешімнен $C=0$ болғанда шығады. Сонымен, ерекше шешім жоқ. Жауабы: $(x^2-1)(y^2-1)=C$.

(1) теңдеуінің дербес жағдайы:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot\varphi(y).$$

*Мысал 6.*

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2y'=e^x,$$

теңдеуінің $y(0)=1$ бастапқы шартын қанағаттандыратын дербес шешімін тап.

►Берілген теңдеуді дифференциалдық пішінде жазамыз:

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2dy-e^xdx=0.$$

Енді айнымалыларын ажыратсақ:

$$y^2dy-\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=0.$$

Екі жағын да интегралдасақ:

$$\int y^2dy-\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\frac{C}{3},.\qquad\frac{y^3}{3}-arctge^x=\frac{C}{3},$$

$$y=\sqrt[3]{C+3arctge^x}.$$

Берілген теңдеудің жалпы шешімін алдық.

Бастапқы шартты ескеріп, тұрақтының мәнін анықтаймыз:

$$1=\sqrt[3]{C+\frac{3}{4}\pi},\qquad C=1-\frac{3}{4}\pi.$$

Сонымен, берілген теңдеудің дербес шешімі:

$$y=\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}\pi+3arcte^x}.$$ ◄

**Біртекті дифференциалдық теңдеулер.**

**Анықтама 9.** $\varphi(x;y)$ функциясы $x$ пен $y$ бойынша $\alpha$ -шы ретті біртекті функция деп аталады, егер кез келген $t$ үшін: $\varphi(tx;ty)=t^\alpha\varphi(x;y)$ теңдігі орындалатын болса.

**Анықтама 10.** Егер $M(x;y)$ және $N(x;y)$ - бірдей ретті біртекті функциялар болса, онда (1) теңдеуі біртекті дифференциалдық теңдеу деп аталады.

$y'=f(x,y)$ теңдеуі біртекті болады, егер $f(tx;ty)=f(x;y)$, яғни, $\alpha=0$.

Біртекті дифференциалдық теңдеу айнымалыларды ауыстыру көмегімен айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіріледі:

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux\,,\; y' = u + xu' \quad \text{немесе} \quad dy = udx + xdu\,. \qquad (12)$$

*Мысал 7.* Теңдеуді шеш: $y^2 + x^2 y' = xy\,y'$.

*Шешуі.* Барлығын теңдеудің бір жағына жинақтау арқылы, біртекті дифференциалдық теңдеуге келтіреміз:

$$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad y^2 dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

$M = y^2$ және $N = x^2 - xy$ - 2-ші ретті біртекті функциялар болғандықтан, теңдеу біртекті дифференциалдық теңдеу. $u = \dfrac{y}{x}$ белгілеуін енгіземіз.

$u^2 x^2 dx + (x^2 - x^2 u)(udx + xdu) = 0 \Rightarrow udx + x(1-u)du = 0$ - бұл айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Екі жағын да $u \cdot x$ көбейтіндісіне бөліп, интегралдасақ:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{1-u}{u} du = C_1 \Rightarrow \ln|x| + \ln|u| - u = C_1 \Rightarrow \ln|ux| - \ln e^4 = \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{xu}{e^u} = C \Rightarrow \left| u = \frac{y}{x} \right| \Rightarrow y = Ce^{\frac{y}{x}}$$ - жалпы шешім.

$u = 0$ және $x = 0$ жағдайлары $y = ux = 0$ жағдайымен тепе-тең. Жалпы шешімнен С=0 болғанда шығады.

*Ескерту 4.* $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$ түріндегі теңдеу біртекті дифференциалдық теңдеуге келтіріледі.

*Мысал 8.* $(x - y + 1)dx = (2x + y - 1)dy$ теңдеуін біртекті дифференциалдық теңдеу түріне келтір.

*Шешуі.* Айнымалыларды ауыстырамыз ($h$ және $t$ - тұрақтылар):

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + t \end{cases} \Rightarrow \left| dx = du\,,\; dy = dv \right| \Rightarrow (u - v + h - t + 1)du = (2u + v + 2h + t - 1)dv\,.$$

$h$ және $t$ -ны бос мүшелері нөлге тең болатындай етіп, таңдап аламыз:

$$\begin{cases} h - t + 1 = 0 \\ 2h + t - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = 0, t = 1\,.$$

Сонымен, $x = u, y = v + 1$ деп жаңа айнымалылар енгізсек,

$(u - v)du = (2u + v)dv$ түріндегі біртекті дифференциал теңдеуге келеміз.

*Мысал 9.* $2x^2 y' = x^2 + y^2$ дифференциал теңдеуін интегралда және оның *y(1)=0* бастапқы шартын қанағаттандыратын дербес шешімін тап.

► $2x^2$ және $x^2 + y^2$ функциялары екінші ретті біртекті функция болғандықтан, берілген теңдеу - біртекті. Айнымалыларды ауыстырамыз: $y = xu\,,\; y' = u + xu'$.

Онда

$$2x^2(u + xu') = x^2 + (xu)^2,\; 2x^2(u + xu') = x^2(1 + u^2).$$

*x≠0* деп, теңдеудің екі жағын да $x^2$-қа бөлеміз:

$$2u + 2x\frac{du}{dx} = 1 + u^2, 2xdu = \left(1 + u^2 - 2u\right)dx.$$

Айнымалыларды ажыратып, екі жағын да интегралдасақ:

$$\frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \frac{dx}{2x},$$

$$\int \frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \int \frac{dx}{2x}, \qquad \int \frac{d(u-1)}{(u-1)^2} = \frac{1}{2}\ln|x|,$$

$$-\frac{1}{u-1} = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C, \qquad 1 = (1-u)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

Соңғы өрнектегі *u*-дың орнына *y/x* –ті қойып, жалпы интегралды аламыз: $1 = \left(1 - \frac{y}{x}\right)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right), \qquad x = (x-y)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$

Оны $y$ –ке қатысты шешсек, берілген дифференциал теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y = x - \frac{x}{\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)}.$$

*y(1)=0* бастапқы шартын ескере, *C* тұрақтысын анықталық:

$$0 = 1 - \frac{1}{\ln C}, \qquad \ln C = 1, \qquad C = e.$$

Сонымен, берілген теңдеудің дербес шешімі: $y = x - \dfrac{x}{1 + \ln\sqrt{\|x\|}}$. ◄